PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD MATEMÁTICAS II DE ANDALUCÍA
CURSO 2011-2012.

Opción A

Ejercicio 1, Opción A, Modelo 2 de 2012.

Sea la función f : [1; e] $\rightarrow$ R definida por $f(x) = x^2 - 8\cdot\ln(x)$ donde ln denota la función logaritmo neperiano.
(a) [0'75 puntos] Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*.
(b) [1 punto] Calcula los extremos absolutos y relativos de la función *f* (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).
(c) [0'75 puntos] Estudia los intervalos de concavidad y de convexidad.

Solución

Sea la función f : [1; e] $\rightarrow$ R definida por $f(x) = x^2 - 8\cdot\ln(x)$ donde ln denota la función logaritmo neperiano.
(a) y (b)
Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*. Estudio de la 1ª derivada
$f(x) = x^2 - 8\ln(x)$. Es continua y derivable en $(0,\infty)$, en particular en el intervalo dado.
$f'(x) = 2x - 8/x$
$f'(x) = 0 \rightarrow 2x - 8/x = 0 \rightarrow 2x = 8/x \rightarrow 2x^2 = 8 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$.
x = -2 no está en el dominio, el posible extremo es x = 2.
Como $f'(1'5) = 2(1'5) - 8/1'5 \cong -2'3 < 0$, **luego f es estrictamente decreciente** $(\searrow)$ **en (0,2)**
Como $f'(2'5) = 2(2'5) - 8/2'5 \cong 1'8 > 0$, **luego f es estrictamente creciente** $(\nearrow)$ **en (2,e).**

Por definición x = 2 es un mínimo relativo que vale $f(2) = 4 - 8\ln(2) \cong -1'54$

Como la función es derivable, a parte de x = 2, los extremos absolutos se pueden encontrar en x=1 y x=e (los extremos del intervalo [1,e])
$f(1) = 1 - 0 = 1$
$f(e) = e^2 - 8\ln(e) \cong - 0'61$.
El máximo absoluto es "1" y se alcanza en x = 1.
El mínimo absoluto es "4 - 8ln(2)" y se alcanza en x = 2.
(c)
Estudia los intervalos de concavidad y de convexidad. Estudio de la 2ª derivada.
$f(x) = x^2 - 8\ln(x)$.
$f'(x) = 2x - 8/x$
$f''(x) = 2 + 8/x^2$
De $f''(x) = 0 \rightarrow 2 + 8/x^2 = 0 \rightarrow 2x^2 = -8 \rightarrow x^2 = -4$, que no tiene solución, luego la función siempre es cóncava $(\cap)$ o convexa $(\cup)$.
Como $f''(2) = 2 + 2 = 4 > 0$, **f es convexa $(\cup)$ en (1,e).**

Ejercicio 2, Opción A, Modelo 2 de 2012.

Sea *f* : R $\rightarrow$ R la función definida por $f(x) = x^3 - 4x$
(a) [0'75 puntos] Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 1.
(b) [0'75 puntos] Esboza el recinto limitado por la gráfica de f y la recta y = -x - 2, determinando los puntos de corte de ambas gráficas.
(c) [1 punto] Calcula el área del recinto anterior.

Solución

Sea *f* : R $\rightarrow$ R la función definida por $f(x) = x^3 - 4x$
(a)
Halla la ecuación de la recta tangente (R.T.) a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 1.
La recta tangente en x = 1 es "$y - f(1) = f'(1)(x - 1)$"
$f(x) = x^3 - 4x \rightarrow f(1) = (1)^3 - 4(1) = - 3$.
$f'(x) = 3x^2 - 4 \rightarrow f'(1) = 3(1)^2 - 4 = - 1$.
La recta tangente es y + 3 = -1(x – 1) = -x + 1, de donde la R.T. es "y = -x – 2".

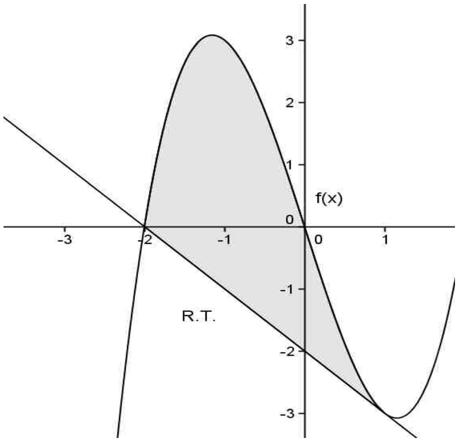
(b)
Esboza el recinto limitado por la gráfica de f y la recta y = -x - 2, determinando los puntos de corte de ambas gráficas.

f es una cúbica y vemos que $\lim\limits_{x\to -\infty}(x) = -\infty$ (nos lo dá el término de mayor grado, x^3), además $\lim\limits_{x\to +\infty}(x) = +\infty$.

Los cortes son:
Para x = 0, punto (0,f(0)) = (0,0)
Para f(x) = 0 $\rightarrow$ $0 = x^3 - 4x = x(x^2 - 4)$, de donde x = 0 y $x^2 = 4$ $\rightarrow$ x = $\pm$ 2. Puntos (-2,0), (0,0) y (2,0).
Igualamos f a la recta y = -x – 2 (observamos que es la recta tangente en x = 1, luego en x = 1 coinciden) para ver sus puntos de corte.
De $x^3 - 4x = -x - 2$, tenemos $x^3 - 3x + 2 = 0$. Utilizamos Ruffini

	1	0	-3	2
1		1	1	-2
	1	1	-2	$\boxed{0}$

Vemos que x = 1, es una solución y resolviendo $x^2 + x - 2 = 0$ obtenemos x = 1 y x = -2, luego f y la recta y=-x-2 se cortan en x = 1 (doble) y en x = -2.
$f(1) = (1)^3 - 4 = -3$ y $f(-2) = (-2)^3 - 4(-2) = 0$
Para dibujar la recta y = -x -2 necesitamos dos puntos, uno es x = 1, y sale y = -3. Punto (1,-3) (coinciden f y recta tangente), otro puede ser x = -2 y obtenemos y = 0. Punto (-2,0). Con estos datos un esbozo de las gráficas y del recinto que limitan es:



(c)
Calcula el área del recinto anterior.
Área = $\int_{-2}^{1}[(x^3 - 4x) - (-x - 2)]dx = \int_{-2}^{1}(x^3 - 3x + 2)dx = [x^4/4 - 3x^2/2 + 2x]_{-2}^{1} =$
$= (1/4 - 3/2 + 2) - (16/4 - 6 - 4)\ u^2$ $\mathbf{= 27/4\ u^2 = 6'75\ u^2}$**.**

Ejercicio 3, Opción A, Modelo 2 de 2012.

Considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + (k+1)y + 2z = -1 \\ kx + y + z = 2 \\ x - 2y - z = k + 1 \end{cases}$$

(a) [1'75 puntos] Clasifícalo según los distintos valores de *k*.
(b) [0'75 puntos] Resuélvelo para el caso *k* = 2.

Solución

(a)
Clasifícalo según los distintos valores de *k*.

La matriz de los coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & k+1 & 2 \\ k & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$A^* = \begin{pmatrix} 1 & k+1 & 2 & -1 \\ k & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & k+1 \end{pmatrix}$.

Si det(A) = |A| $\neq$ 0, rango(A) = rango(A^*) = 3 = nº de incógnitas. El sistema es compatible y determinado y tiene solución única.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & k+1 & 2 \\ k & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila} \end{matrix} = (1)(1) - (k+1)(-k-1) + (2)(-2k-1) = 1 + (k^2 + 2k + 1) - 4k - 2 = k^2 - 2k \neq 0,$$

Resolviendo la ecuación $k^2 - 2k = 0 = k(k - 2)$, obtenemos $k = 0$ y $k = 2$.

Si **$k \neq 0$ y $k \neq 2$**, $\det(A) = |A| \neq 0$, rango(A) = rango(A^*) = 3 = nº de incógnitas. **El sistema es compatible y determinado y tiene solución única.**

Si **$k = 0$**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

En A como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, tenemos rango(A)=2

En A^* como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{segunda} \\ \text{fila} \end{matrix} = -0 + (1)(2) - (2)(-3) = 2 + 6 = 8 \neq 0$, tenemos rango($A^*$) = 3. Como rango(A) = 2 $\neq$ rango(A^*) = 3, **el sistema es incompatible y no tiene solución.**

Si **$k = 2$**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } A^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

En A como $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$, tenemos rango(A)=2

En A^* como $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila} \end{matrix} = (1)(7) - (3)(4) + (-1)(-5) = 7 - 12 + 5 = 0$, tenemos rango($A^*$) = 2.

Como rango(A) = rango(A^*) = 2 < número de incógnitas, **el sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones.**

(b)

Resuélvelo para el caso $k = 2$.

Hemos visto en el apartado anterior que si **$k = 2$**, rango(A) = rango(A^*) = 2, **el sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones.**

Como el rango es 2, sólo necesitamos 2 ecuaciones. (Tomo las del menor de A distinto de cero con el que hemos determinado el rango, es decir la 1ª y la 2ª).

$x + 3y + 2z = -1$
$2x + y + z = 2$. Tomo **$z = a$** $\in$ R, y a $Ec_2 + Ec_1(-2)$, con lo cual tenemos

$x + 3y + 2a = -1$
$-5y - 3a = 4$, de donde $-4 - 3a = 5y$, luego $y = -4/5 - 3a/5$. Entrando en la primera ecuación tenemos

$x + 3(-4/5 - 3a/5) + 2a = -1$, de donde $x = -1 + 12/5 + (+9/5 - 2)a = 7/5 - (1/5)a$

La solución del sistema es $(x,y,z) = (7/5 - (1/5)a, -4/5 - (3/5)a, a)$ con $a \in$ R.

Ejercicio 4, Opción A, Modelo 2 de 2012.

Dadas la rectas $r \equiv (x+3)/-6 = (y-9)/4 = (z-8)/4$ y $s \equiv (x-3)/3 = (y-9)/-2 = (z-8)/-2$
(a) [1 punto] Determina la posición relativa de las rectas *r* y *s*.
(b) [1'5 puntos] Calcula la distancia entre *r* y *s*.

Solución

Dadas la rectas r ≡ (x+3)/-6 = (y-9)/4 = (z-8)/4 y s ≡ (x-3)/3 = (y-9)/-2 = (z-8)/-2

(a)

Determina la posición relativa de las rectas *r* y *s*.

Un punto de "r" es A(-3,9,8), y un vector director es (-6,4,4). Otro mas sencillo es **u** = (-3,2,2)

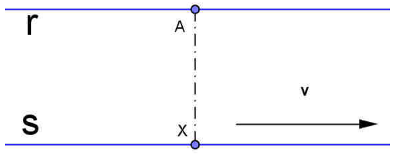
Un punto de "s" es B(3,9,8), y un vector director es **v** = (3,-2,-2).

Observamos que **u** = -1.**v**, por tanto las rectas son paralelas.

Formamos el vector **AB** = (6,0,0). Vemos que **AB** ≠ λ**u**, por tanto **las rectas son paralelas y distintas**.

(b)

Calcula la distancia entre *r* y *s*.



Ponemos la recta "s" en paramétricas: x = 3 + 3λ, y = 9 - 2λ y z = 8 - 2λ, con λ ∈ R.

Tomamos un punto genérico de "s", el X, formamos el vector **XA** y le imponemos la condición de ser perpendicular a "s" (su producto escalar (•) es 0), obtenemos el valor de λ, y tenemos en cuenta que d(r,s) = = d(A,r) = d(A,X) = ||**AX**||, siendo || || el módulo del vector.

X(x,y,z) = (3 + 3λ, 9 - 2λ, 8 - 2λ). A(-3,9,8). **v** = (3,-2,-2).

AX = (3 + 3λ + 3, 9 - 2λ - 9, 8 - 2λ - 8) = (6 + 3λ, - 2λ, - 2λ).

AX•v = 0 = (6 + 3λ, - 2λ, - 2λ)•(3,-2,-2) = 18 + 9λ + 4λ+ 4λ = 18 + 17λ = 0, de donde λ = - 18/17, y el punto X proyección ortogonal de A sobre "r" es X(3 + 3(-18/17), 9 – 2(-18/17), 8 – 2(-18/17)) = = X(-3/17,189/17,172/17).

Vector **AX** = (6 + 3(-18/17), - 2(-18/17), - 2(18/17)) = (48/17,36/17,36/17)

d**(r,s) = d(A,r) = d(A,X)** = ||**AX**|| = $\sqrt{\left(\frac{48}{17}\right)^2+\left(\frac{36}{17}\right)^2+\left(\frac{36}{17}\right)^2}\,u^1=\sqrt{\frac{4896}{(17)^2}}u^1=\sqrt{\frac{288}{17}}$ ≅ **4'115966 u¹**.

Opción B

Ejercicio 1, Opción B, Modelo 2 de 2012.

Sea la función *f* : R → R definida por f(x) = $e^x(x^2 - x + 1)$.

(a) [1'25 puntos] Calcula $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to +\infty} f(x)$.

(b) [1'25 puntos] Halla los extremos relativos de *f* (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan), determinando si son máximos o mínimos.

(c) [0'5 puntos] Determina las abscisas de los puntos de inflexión de la gráfica de *f*.

Solución

Sea la función *f* : R → R definida por f(x) = $e^x(x^2 - x + 1)$.

(a)

Calcula $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ *y* $\lim_{x\to +\infty} f(x)$.

Regla de L'Hôpital (L'H): Si $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ y existe $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$. La regla sigue también para $\frac{\infty}{\infty}$, y cuando x → ∞.

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} e^x(x^2 - x + 1) = \lim_{x\to +\infty} e^{-x}((-x)^2 - (-x) + 1) = \lim_{x\to +\infty}\frac{x^2+x+1}{e^x} = \left\{\frac{\infty}{\infty}; L'H\right\} = \lim_{x\to +\infty}\frac{2x+1}{e^x} =$$

$$= \left\{\frac{\infty}{\infty}; L'H\right\} = \lim_{x\to +\infty}\frac{2}{e^x} = \frac{2}{\infty} = 0.\quad \lim_{x\to +\infty} e^x(x^2 - x + 1) = (\infty)(\infty) = \infty.$$

(b)

Halla los extremos relativos de *f* (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan), determinando si son máximos o mínimos.

Me piden la monotonía. Estudio de f'(x)

f(x) = $e^x(x^2 - x + 1)$.

f '(x) = $e^x(x^2 - x + 1) + e^x(2x - 1) = e^x(x^2 + x)$.

De f’(x) = 0, como e^x no se anula nunca tenemos $x^2 + x = 0 = x(x + 1)$, de donde x = 0 y x = -1, posibles extremos relativos.

Como f’(-2) = (+)(2) > 0, **f es estrictamente creciente** $(\nearrow)$ **en (-∞,-1).**

Como f’(-0’1) ≅ (+)(-0’09) < 0, **f es estrictamente decreciente** $(\searrow)$ **en (-1,0).**

Como f’(1) = (+)(2) > 0, **f es estrictamente creciente** $(\nearrow)$ **en (1,+∞).**

Por definición x = -1 es un máximo relativo y vale $f(-1) = e^{(-1)}((-1)^2 – (-1) + 1) = 3/e \cong 1'1$.
Por definición x = 0 es un mínimo relativo y vale $f(0) = e^{(0)}(0 – 0 + 1) = 1$.

(c)

Determina las abscisas de los puntos de inflexión de la gráfica de *f*.

Me piden la curvatura. Estudio de f’’(x)

$f(x) = e^x(x^2 - x + 1)$; $f'(x) = e^x(x^2 + x)$; $f''(x) = e^x(x^2 + x) + e^x(2x + 1) = e^x(x^2 + 3x + 1)$.

De f’’(x) = 0, como e^x no se anula nunca tenemos $x^2 + 3x +1 = 0$. Resolviendo la ecuación de 2º grado obtenemos $x = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2} \cong -2'6$ y $x = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} \cong -0'38$, posibles puntos de inflexión.

Como f’’(-3) = (+)(1) > 0, **f es convexa (∪) en $\left(-\infty, \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}\right)$.**

Como f’’(-1) = (+)(-1) < 0, **f es cóncava (∩) en $\left(\frac{-3 - \sqrt{5}}{2}, \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}\right)$.**

Como f’’(0) = (+)(1) > 0, **f es convexa (∪) en $\left(\frac{-3 + \sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$.**

Por definición $x = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}$ y $x = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}$ son puntos de inflexión, porque en ellos cambia la curvatura.

Ejercicio 2, Opción B, Modelo 2 de 2012.

Sean *f; g* : R → R las funciones definidas por $f(x) = x^2 - 2x$ y $g(x) = - x^2 + 4x$ respectivamente.
(a) [0'75 puntos] Halla los puntos de corte de sus gráficas y realiza un esbozo del recinto que limitan.
(b) [1'75 puntos] Calcula el área de dicho recinto.

Solución

Sean *f; g* : R → R las funciones definidas por $f(x) = x^2 - 2x$ y $g(x) = - x^2 + 4x$ respectivamente.

(a)

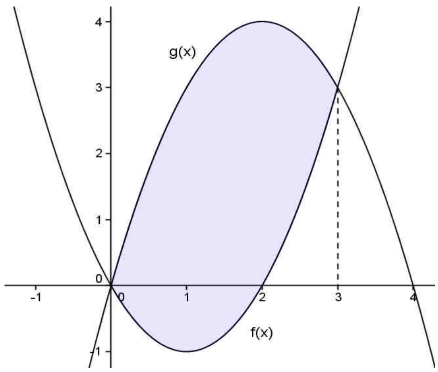
Halla los puntos de corte de sus gráficas y realiza un esbozo del recinto que limitan.

Resolvemos f(x) = g(x) → $x^2 - 2x = - x^2 + 4x)$ → $2x^2 - 6x = 0 = x(2x – 6)$, de donde x = 0 y x = 3. Las gráficas se cortas en x = 0 y x = 3.

La gráfica de f es una parábola con las ramas hacia arriba y abscisa de su vértice (V) en f’(x) = 0 = 2x – 2, es decir x = 1, de donde su vértice es V(1,f(1)) = V(1,-1)

La gráfica de g es una parábola con las ramas hacia abajo y abscisa de su vértice (V) en g’(x) = 0 = - 2x +4, es decir x = 2, de donde su vértice es V(2,g(2)) = V(2,4).

Un esbozo de sus gráficas es :



(b)

Calcula el área de dicho recinto.

Área = $\int_0^3 [(-x^2 + 4x) – (x^2 – 2x)]dx = \int_0^3(-2x^2 + 6x)dx = [-2x^3/3 + 3x^2]_0^3$ **= -18 + 27 u² = 9 u².**

Ejercicio 3, Opción B, Modelo 2 de 2012.

[2'5 puntos] Encuentra la matriz X que satisface la ecuación $XA + A^3B = A$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución

Veamos si la matriz A tiene inversa es decir si su determinante es $\neq 0$.

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ Adjuntos primera fila $= 1(-1) = -1 \neq 0$, luego existe $A^{-1} = (1/|A|)\cdot\text{Adj}(A^t)$.

De $XA + A^3B = A \rightarrow XA = A - A^3B$. Multiplicando por la derecha por A^{-1} tenemos:

$XAA^{-1} = AA^{-1} - A^3BA^{-1} \rightarrow$ $\mathbf{X = I_3 - A^3BA^{-1}}$

$$A^2 = A.A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3; \qquad A^3 = A^2\cdot A = I_3\cdot A = A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A^3B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}; A^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A; \ \text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$A^{-1} = (1/|A|)\cdot\text{Adj}(A^t) = (1/-1)\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A.$$

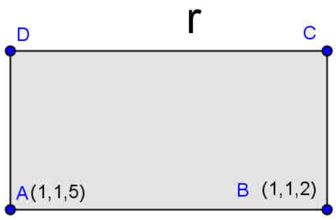
$$A^3B\cdot A^{-1} = A^3B\cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Luego $\mathbf{X = I_3 - A^3BA^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 4, Opción B, Modelo 2 de 2012.

[2'5 puntos] Los puntos A(1, 1, 5) y B(1, 1, 2) son vértices consecutivos de un rectángulo ABCD. El vértice C, consecutivo a B, está en la recta $x = (y-6)/-2 = (z+1)/2$. Determina los vértices C y D.

Solución



Ponemos la recta "r" en paramétricas $x = (y-6)/-2 = (z+1)/2 = \lambda \in R$, de donde

$x = \lambda$

$y = 6 - 2\lambda$

$x = -1 + 2\lambda$

Como la figura es un paralelogramo los vectores **AB** y **DC** son iguales, **AB** = **DC** = (0,0,-3).

Como C $\in$ "r", C es de la forma $C(x, y, z) = C(\lambda, 6 - 2\lambda, -1 + 2\lambda)$.

Como el vector **BC** es perpendicular al vector **AB**, su producto escalar es cero, es decir **AB•BC** = 0.

AB = (0,0,-3), **BC** = $(\lambda - 1, 6 - 2\lambda - 1, -1 + 2\lambda - 2) = (-1 - \lambda, 5 - 2\lambda, -3 + 2\lambda)$.

AB•BC = 0 = $(0,0,-3)\bullet(-1 - \lambda, 5 - 2\lambda, -3 + 2\lambda) = 0 + 0 + (-3)(-3 + 2\lambda) = 9 - 6\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 3/2$, luego el punto C es $C((3/2), 6 - 2(3/2), -1 + 2(3/2)) = C((3/2), 3, 2)$.

Como **AB** = **DC** = (0,0,-3) = (3/2 - x, 3 - y, 2 - z). Igualando tenemos

0 = 3/2 – x, de donde x = 3/2.

0 = 3 – y, de donde y = 3.

-3 = 2 - z, de donde z = 5, y **el punto D(x,y,z) es D(3/2, 3, 5).**